

### Exercice 1.1 Antégration élémentaire

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int 2x^3 - 3x + 1 \, dx$

2.  $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$

3.  $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx$

4.  $\int \sqrt{2x+1} \, dx$

5.  $\int e^{2x+1} \, dx$

6.  $\int \sqrt[3]{(x-1)^2} \, dx$

7.  $\int \frac{x}{x+1} \, dx$

8.  $\int x\sqrt{5+x^2} \, dx$

9.  $\int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx$

10.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

11.  $\int \frac{e^{-1/x}}{x^2} \, dx$

12.  $\int xe^{x^2} \, dx$

13.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

14.  $\int \frac{1}{x \ln^3 x} \, dx$

15.  $\int x^2 e^{x^3} \, dx$

16.  $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} \, dx$

17.  $\int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx$

18.  $\int \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x} \, dx$

19.  $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} \, dx$

20.  $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

21.  $\int \sin(3x) \, dx$

22.  $\int \frac{1}{\sin x \cos x} \, dx$

23.  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

24.  $\int x(x^2 + 1)^2 \, dx$

25.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \, dx$

26.  $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \, dx$

27.  $\int (ax+b)^n \, dx$  avec  
 $a \neq 0$  et  $n \neq -1$

28.  $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx$  avec  
 $ax+b \neq 0$ ,  $a \neq 0$  et  $n > 1$

29.  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \, dx$

30.  $\int (1 + 2x^3)^2 \, dx$

31.  $\int (1 + \cos x)^2 \, dx$

32.  $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

33.  $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$

34.  $\int \frac{1}{1+e^x} \, dx$

35.  $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \, dx$

36.  $\int \frac{1}{\sin(4x)} \, dx$

**SOLUTIONS.**

1.  $\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + c$

2.  $\frac{1}{12}(8\sqrt{x} + 3)x^{4/3} + c$

3.  $2\sqrt{x+1} + c$

4.  $\frac{\sqrt{(2x+1)^4} + c}{-3}$

5.  $\frac{e^{2+c}}{2} + c$

6.  $\frac{4}{7}(x-1)^{7/4} + c$

7.  $x - \ln|x+1| + c$

8.  $\frac{1}{3}(5+x^2)^{3/2} + c$

9.  $\ln(1+e^x) + c$

10.  $2xe^{\sqrt{x}} + c$

11.  $e^{-\ln x} + c$

12.  $\frac{e^{x^2}}{2} + c$

13.  $\frac{\ln^4 x}{4} + c$

14.  $-\frac{1}{2\ln^2 x} + c$

15.  $\frac{e^{x^2}}{3} + c$

16.  $\ln|x + \sin x| + c$

17.  $\frac{\operatorname{arctan}(x^4)}{4} + c$

18.  $\ln|1 + \sin^2 x| + c$

19.  $-\frac{1}{\sqrt{x}} + c$

20.  $\frac{\sin^2 x}{4} + c$

21.  $-\frac{1}{3}\cos(3x) + c$

22.  $\ln|\tan x| + c$

23.  $-2\cos\sqrt{x} + c$

24.  $\frac{(x^2+1)^4}{6} + c$

25.  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^3} + c$

26.  $e^{2\cos x} + c$

27.  $\frac{1}{a-n+1}(ax+b)^{n+1} + c$

28.  $\frac{1}{a-n+1}(ax+b)^{-n+1} + c$

29.  $\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctan} x + c$

30.  $\frac{4}{7}x^7 + e^x + x + c$

31.  $\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{\sin x \cos x}{2} + c$

32.  $\operatorname{arcsin} x + 2\sqrt{1-x^2} + c$

33.  $\tan x - \frac{1}{\tan x} + c$

34.  $x - \ln(1+e^x) + c$

35.  $x - \cos x + c$

36.  $\frac{1}{3}\ln|\tan(2x)| + c$

 **Exercice 1.2** *Intégration par parties*

Calculer les intégrales suivants :

1.  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

2.  $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$

3.  $\int \ln(1+x) dx$

4.  $\int x^2 e^x dx$

5.  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

6.  $\int x \sin x dx$

7.  $\int x \ln x dx$

8.  $\int x^2 \cos x dx$

9.  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

10.  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\tan x} dx$

11.  $\int x^3 \sin x^2 dx$

12.  $\int e^{2x} \sin(3x) dx$

13.  $\int e^{-3x} \cos(2x) dx$

14.  $\int x^3 \ln x dx$

15.  $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx$

16.  $\int \ln^2 x dx$

17.  $\int x \sin^2 x dx$

**SOLUTION.**

1. Comme  $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = -\frac{1}{x} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{x^2}$  on obtient  $-\frac{1+\ln x}{x} + c$
2. Comme  $f(x) = \ln(\ln(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$  et  $g(x) = \ln(x) \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{x}$  on obtient  $(\ln(\ln(x)) - 1) \ln(x) + c$
3. Comme  $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$  et  $g(x) = x \Leftarrow g'(x) = 1$  on obtient  $(1+x) \ln(1+x) - x + c$
4. Comme  $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$  et  $g(x) = e^x \Leftarrow g'(x) = e^x$  on obtient  $e^x((x-2)x+2) + c$
5. Comme  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = 2\sqrt{x} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  on obtient  $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$
6. Comme  $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$  et  $g(x) = -\cos x \Leftarrow g'(x) = \sin x$  on obtient  $-x \cos x + \sin x + c$
7. Comme  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$  et  $g(x) = x^2/2 \Leftarrow g'(x) = x$  on obtient  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
8. Comme  $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$  et  $g(x) = \sin x \Leftarrow g'(x) = \cos x$  on obtient  $x^2 \sin x - 2[-x \cos x + \sin x] + c$
9. Comme  $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $g(x) = -\sqrt{1-x^2} \Leftarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  on obtient  $-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + c$
10. Comme  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = 1/\cos^2 x$  et  $g(x) = e^{\tan x} \Leftarrow g'(x) = e^{\tan x}/x^2$  on obtient  $e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$
11. Comme  $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(x^2)$  et  $g(x) = x^4 \Leftarrow g'(x) = x^3$  on obtient  $\frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$
12. Comme  $f(x) = \sin(3x) \Rightarrow f'(x) = 3 \cos(3x)$  et  $g(x) = e^{2x}/2 \Leftarrow g'(x) = e^{2x}$  on obtient  $\frac{2e^{2x}(\sin(3x) - \frac{3}{2} \cos(3x))}{13} + c$

9. Comme  $f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et  $g(x) = -\sqrt{1-x^2} \Leftarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  on obtient  $-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + c$
10. Comme  $f(x) = \sin x / \cos x \Rightarrow f'(x) = 1/\cos^2 x$  et  $g(x) = e^{\tan x} \Leftarrow g'(x) = e^{\tan x}/x^2$  on obtient  $e^{\tan x}(\tan x - 1) + c$
11. Comme  $f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(x^2)$  et  $g(x) = x^4 \Leftarrow g'(x) = x^3$  on obtient  $\frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$
12. Comme  $f(x) = \sin(3x) \Rightarrow f'(x) = 3 \cos(3x)$  et  $g(x) = e^{2x}/2 \Leftarrow g'(x) = e^{2x}$  on obtient  $\frac{2e^{2x}(\sin(3x) - \frac{3}{2} \cos(3x))}{13} + c$
13. Comme  $f(x) = \cos(2x) \Rightarrow f'(x) = -2 \sin(2x)$  et  $g(x) = \frac{-e^{-3x}}{3} \Leftarrow g'(x) = e^{-3x}$  on obtient  $-\frac{3e^{-3x}(\cos(2x) - \frac{2}{3} \sin(2x))}{13} + c$
14. Comme  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \frac{x^4}{4} \Leftarrow g'(x) = x^3$  on obtient  $\frac{x^4(4 \ln x - 1)}{16} + c$
15. Comme  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = \frac{4x^{3/4}}{3} \Leftarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  on obtient  $\frac{4}{3}x^{3/4}(\ln x - \frac{4}{3}) + c$
16. Comme  $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$  et  $g(x) = x \ln x - x \Leftarrow g'(x) = \ln x$  on obtient  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c$
17. Comme  $f(x) = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$  et  $g(x) = \frac{x^2}{2} \Leftarrow g'(x) = x$  on obtient  $\frac{1}{4}(x^2 - x \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x)) + c$

1.  $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$

2.  $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3.  $\int \frac{1}{x-\sqrt{x}} dx$

4.  $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} dx$

5.  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

6.  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

7.  $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} dx$

8.  $\int e^x \ln(1+e^x) dx$

9.  $\int \frac{1}{x(2+\ln^2 x)} dx$

10.  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

11.  $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}} dx$

12.  $\int \sqrt{e^x-1} dx$

13.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$

14.  $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$

15.  $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

16.  $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

17.  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

18.  $\int x\sqrt{a+x^2} dx$

19.  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

20.  $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

21.  $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$

22.  $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$

23.  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

1. Si on pose  $t = \ln(x)$  alors  $\frac{1}{x} dx = dt$  et on obtient  $-\cos(\ln(x)) + c$
2. Si on pose  $t = \sqrt{x}$  alors  $dx = 2t dt$  et on obtient  $2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + c$
3. Si on pose  $t = \sqrt{x}$  alors  $dx = 2t dt$  et on obtient  $2\ln(\sqrt{x} - 1) + c$
4. Si on pose  $t = 1 + \sqrt{x}$  alors  $dx = 2(t - 1) dt$  et on obtient  $\frac{4\sqrt{x^{3/2} + x}}{\sqrt{x}} + c$
5. Si on pose  $t = e^x$  alors  $e^x dx = dt$  et on obtient  $\ln(1 + e^x) + c$
6. Si on pose  $t = \ln x$  alors  $\frac{1}{x} dx = dt$  et on obtient  $\ln|\ln x| + c$
7. Si on pose  $t = \ln \frac{1}{x}$  alors  $-\frac{1}{x} dx = 2t dt$  et on obtient  $-2\sqrt{\ln \frac{1}{x}} + c$
8. Si on pose  $t = 1 + e^x$  alors  $e^x dx = dt$  et on obtient  $(1 + e^x) \ln(1 + e^x) - e^x + c$
9. Si on pose  $t = \ln x$  alors  $\frac{1}{x} dx = dt$  et on obtient  $\frac{\arctan\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + c$
10. Si on pose  $t^2 = 1 - x^2$  alors  $-x dx = t dt$  et on obtient  $-\frac{(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}}{3} + c$
11. Si on pose  $t^2 = x^3 - 1$  alors  $3x^2 dx = 2t dt$  et on obtient  $\frac{2(x^3 + 2)\sqrt{x^3 - 1}}{9} + c$

12. Si on pose  $t^2 = e^x - 1$  alors  $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$  et on obtient  $2(\sqrt{e^x-1} - \arctan(\sqrt{e^x-1})) + c$
13. Si on pose  $t = \ln x$  alors  $dx = e^t dt$  et on obtient  $\frac{\ln^2 x}{x} + c$
14. Si on pose  $t = e^x$  alors  $dx = \frac{1}{t} dt$  et on obtient  $\arctan e^x + c$
15. Si on pose  $t = \tan x$  alors  $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$  et on obtient  $e^{\tan x} + c$
16. Si on pose  $t = \ln x$  alors  $dx = e^t dt$  et on obtient  $-\cos(\ln x) + c$
17. Si on pose  $t = \sqrt{1+x^2}$  alors  $2x dx = 2t dt$  et on obtient  $\sqrt{1+x^2} + c$
18. Si on pose  $t = \sqrt{a+x^2}$  alors  $2x dx = 2t dt$  et on obtient  $\frac{\sqrt{(a+x^2)^3}}{3} + c$
19. Si on pose  $t = \ln x$  alors  $\frac{1}{x} dx = dt$  et on obtient  $\arcsin(\ln x) + c$
20. Si on pose  $t = \frac{1}{x}$  alors  $-\frac{1}{x^2} dx = dt$  et on obtient  $-e^{1/x} + c$
21. Si on pose  $t = 1 + \sin x$  alors  $\cos x dx = dt$  et on obtient  $\ln|1 + \sin x| + c$
22. Si on pose  $t = \frac{1}{x}$  alors  $-\frac{1}{x^2} dx = dt$  et on obtient  $-\sin \frac{1}{x} + c$
23. Si on pose  $t^2 = 1 + x^2$  alors  $x dx = t dt$  et on obtient  $\frac{(x^2-2)}{3} \sqrt{x^2+1} + c$





### Exercice 1.4 *Intégration de fonctions rationnelles*

Calculer les intégrales suivants :

a)  $\int \frac{a}{x-b} dx$

b)  $\int \frac{a}{(x-b)^n} dx, n \neq 1$

c)  $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$

d)  $\int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx$

e)  $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} dx$

**SOLUTION.** Soit  $c$  une constante réelle.

a)  $\int \frac{a}{x-b} dx = a \ln|x-b| + c$

b)  $\int \frac{a}{(x-b)^n} dx = \frac{a}{(1-n)(x-b)^{n-1}} + c$

c) Comme  $\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$  ssi  $A+B=2$  et  $-2A-B=-1$ , alors  $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + 3\int \frac{1}{x-2} dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + c$

d) Comme  $\frac{3x+1}{x^3-4x} = \frac{-1/4}{x} + \frac{-5/8}{x+2} + \frac{7/8}{x-2}$  alors  $\int \frac{3x+1}{x^3-4x} dx = -\frac{\ln|x|}{4} - \frac{5\ln|x+2|}{8} + \frac{7\ln|x-2|}{8} + c$

e) Comme  $\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} = \frac{(3x^2-5x-2)+(7x-3)}{3x^2-5x-2} = 1 + \frac{7x-3}{3x^2-5x-2}$  alors  $\int \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-5x-2} dx = x + \frac{16}{21} \ln|3x+1| + \frac{11}{7} \ln|x-2| + c$