Sommes usuelles :

Dans tout ce qui suit, on considère $n \in \mathbb{N}$.

1. somme des premiers entiers naturels : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

2. somme des premiers carrés d'entiers naturels : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3. somme des premiers cubes d'entiers naturels : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

(On peut faire commencer chacune de ces sommes à l'indice 1, puisque le terme d'indice 0 vaut 0,

par exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + ... + n = 1 + ... + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$*)*

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a :

a. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$

b. Autrement dit, $\text{somme de termes consécutifs} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{(\text{premier terme}) + (\text{dernier terme})}{2}$

c. De manière générale, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \times \frac{u_m + u_n}{2}}$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a, notamment $u_n = u_0 \times q^n$, et :

a. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, cas particulier : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

b. Autrement dit, $\text{somme de termes consécutifs} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$

c. De manière générale, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}}$

6. téléscopage : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}}$

7. linéarité : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, ainsi que $a \in \mathbb{R}$

a. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a u_k = a \sum_{k=0}^{n} u_k}$

b. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k}$

À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(b) $1.\,n + 2.\,(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1$.

(a) En séparant la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(b) On réécrit

$$1.\,n + 2.\,(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1 = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

et on réorganise

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \,.$$

En écrivant au numérateur $k = (k+1) - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,.\end{aligned}$$

(a) Calculer

$$\sum_{k=1}^{p} kk!\ .$$

(a) En écrivant $k = (k+1) - 1$

$$\sum_{k=1}^{p} kk! = \sum_{k=1}^{p} (k+1)! - k! = (p+1)! - 1.$$

Calculer

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{2}{1}\;\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=n+1.$$