$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\ ;$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}\ ;$$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$$

c) Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit d'une forme inderterminée, nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin^2(x)$$

Alors

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{1}{(1 + x^2)\cos(x)}$$

On a « séparé » la partie indéterminée $\frac{x}{\sin(x)}$ de la partie où il n'y a pas de problème $\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$

Comme on sait que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

D'autre part

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(1 + x^2)\cos(x)} = 1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin^2(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{x}{\sin(x)} \times \frac{1}{(1 + x^2)\cos(x)} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{\sin(x)} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1 + x^2)\cos(x)} = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$E(\ln(\sqrt{x}) \leq \ln(\sqrt{x}) < E(\ln(\sqrt{x}) + 1$$

Donc

$$\ln(\sqrt{x}) - 1 < E(\ln(\sqrt{x}) \leq \ln(\sqrt{x})$$

On divise par $\sqrt{x} > 0$

$$\frac{\ln(\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{x}} < \frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

On pose $t = \sqrt{x} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

$\frac{\ln(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$

Et $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(t)}{t} \to 0$

Par conséquent

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x .$$

Quand $x \to 0^+$

$$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x \ln x) \ln x) \to 0$$

et

$$(x^x)^x = \exp(x \ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \to 1.$$

Déterminer par comparaison, la limite des suites (u_n) suivantes:

(a) $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$

(b) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

(c) $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

(d) $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

(e) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

(a) $|u_n| \leq \frac{1}{n-1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(b) $0 \leq u_n \leq \frac{1.2\ldots n}{n.n\ldots n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(c) $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$ avec $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

(d) Pour $n \geq 3, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^n \to 0$ donc $u_n \to 0$.

(e) $1 \leq u_n \leq \sqrt[n]{3} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3} \to 1$ donc $u_n \to 1$.

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes:

(a) $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$

(b) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

(c) $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

(d) $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

(a)

$$u_n = \frac{1-(-2/3)^n}{1+(-2/3)^n} \to 1.$$

(b)

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1.$$

(c)

$$u_n = \frac{1-\sqrt{1+1/n^2}}{1+\sqrt{1-1/n^2}} \to 0.$$

(d)

$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}\,.$$

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants:

(a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(b) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

(c) $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(d) $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

(a) $u_n = \mathrm{e}^{n(\ln(1+1/n))}$ or $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$ car $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par suite $u_n \to \mathrm{e}$.

(b) $u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$ car $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

(c) $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(\sin\frac{1}{n})}$ or $\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \to 0$ donc $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1$.

(d) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{2}{n+1})}$ or $n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \to -2$ donc $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} \to \mathrm{e}^{-2}$.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

(c) $\lim_{x\to 0+} x^x$

(d) $\lim_{x\to 1+} \ln x . \ln(\ln x)$

(e) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

(a) Quand $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \to 1.$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \frac{1-1/\sqrt{x}}{\frac{\ln x}{x}+1} \to 1.$$

(c) Quand $x \to 0^+$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = x\ln x \to 0$ donc $x^x \to 1$.

(d) Quand $x \to 1^+$,

$$\ln x . \ln(\ln x) = X \ln X$$

avec $X = \ln x \to 0$ donc $\ln x . \ln(\ln x) \to 0$

(e) Quand $x \to 0$,

(c) Quand $x \to 0^+$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = x \ln x \to 0$ donc $x^x \to 1$.

(d) Quand $x \to 1^+$,

$$\ln x . \ln(\ln x) = X \ln X$$

avec $X = \ln x \to 0$ donc $\ln x . \ln(\ln x) \to 0$

(e) Quand $x \to 0$,

$$(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ donc $(1+x)^{1/x} \to \mathrm{e}$.

(f) Quand $x \to 1$,

$$\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{1-\cos y}{y} = \frac{2\sin^2(y/2)}{y} = \sin(y/2)\,\frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

avec $y = \arccos x \to 0$ donc $\sin y/2 \to 0$ et $\frac{\sin y/2}{y/2} \to 1$ puis $\frac{1-x}{\arccos x} \to 0$.

(a) $\lim_{x\to 0} x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x \cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x-\sin x}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor 1/x \right\rfloor$

(f) $\lim_{x\to +\infty} x\left\lfloor 1/x \right\rfloor$

(a) Quand $x \to 0$,

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0.$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x \cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}\right| \leq \frac{x}{x^2+1} \to 0.$$

(c) Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{x-\sin x} \geq \mathrm{e}^{x-1} \to +\infty.$$

(d) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x+\arctan x}{x}-1\right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \to 0.$$

(e) Quand $x \to 0$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donc

$$\left|\frac{}{x^2+1}\right| \leq \frac{}{x^2+1} \to 0.$$

(c) Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{x-\sin x} \geq \mathrm{e}^{x-1} \to +\infty.$$

(d) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x+\arctan x}{x} - 1\right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \to 0.$$

(e) Quand $x \to 0$,

$$1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$$

donc

$$\left|\lfloor 1/x \rfloor - 1/x\right| \leq 1$$

puis

$$\left|x\lfloor 1/x \rfloor - 1\right| \leq |x| \to 0.$$

(f) Quand $x \to +\infty$, $1/x \to 0$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ puis $x\lfloor 1/x \rfloor = 0 \to 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Existence et calcul de

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right).$$

On a

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z)(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^n}).$$

Or $(1-z)(1+z)=1-z^2$ donc

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^2)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^n}).$$

En répétant la manipulation

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^{2^{n+1}}).$$

Or $(1-z)(1+z)=1-z^2$ donc

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^2)(1+z^2)\dots(1+z^{2^n}).$$

En répétant la manipulation

$$(1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=(1-z^{2^{n+1}}).$$

Or $z^{2^{n+1}}\to 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)=\frac{1}{1-z}\,.$$