1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu \\ &= \int_1^2 (2-2u)du \\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e, e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \left[\ln|1+u|\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1, e]$ sur $[0, 1]$. On pose donc $u = \ln x$ de sorte que $du = \frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e, u vaut 1. On trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx &= \int_0^1 u^n du \\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0, +\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est une bijection de $[1, x]$ sur $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^x - 1}]$. Posant $u = \sqrt{e^t - 1}$, on a

$$du = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} dt$$

d'où

$$F(x) = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{du}{u^2+4} = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$

1. Le numérateur et le dénominateur ayant même degré, on va chercher à écrire la fraction rationnelle sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve

$$f(x) = \frac{ax^2 + x(-2a+b) + (a-b+c)}{(x-1)^2}.$$

Par identification, on trouve $a=2$, $b=1$ et $c=3$. Ainsi, les primitives de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ sont les fonctions

$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + d,$$

où d est une constante.
2. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire

$$\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Par identification (par exemple...), on trouve que $a=2$ et $b=-3$. Une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction est donc

$$x \mapsto 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1}.$$

3. C'est facile, car la fraction rationnelle est sous la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$, avec $u(x) = (x^2-4)$. Une primitive est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^2-4)}.$$

4. On essaie cette fois d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2}.$$

En mettant tout au même dénominateur dans le membre de droite, on trouve par identification le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ 8a+4b+6c & = & 18 \\ -a+4b+c+3d & = & 10 \\ -a+b-c-d & = & -9. \end{array}\right.$$

On résoud ce système et on trouve comme solution $a=2$, $b=-1$, $c=1$ et $d=5$. On intègre maintenant chacun des éléments simples et on trouve qu'une primitive de la fonction f est

$$x \mapsto 2x - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{5}{2(2x+1)}.$$

1. On remarque simplement que $x^2 + 4 = x^2 + 2^2$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ est donc $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. On écrit le dénominateur sous forme canonique, $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$. La méthode précédente donne

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x+2).}$$

3. Le dénominateur se factorise en $(1-x)(1+x)$. On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve

$$a = -1/2,\ b = 1/2.$$

Une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$ est donc $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|$.

1. Posons $u(x) = 3x^2 - 2x + 3$, de sorte que $u'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$. On a donc

$$f(x) = \frac{1}{2} \times u'(x)u(x)^3.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4.$$

2. Posons $u(x) = x^3 - 3x + 1$ de sorte que $u'(x) = 3x^2 - 3 = -3(1 - x^2)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{-1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3 - 3x + 1)^2}.$$

3. Posons $u(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$. On a $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Une primitive de f est donc la fonction

$$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

4. Il faut commencer par écrire que $\ln(x^2) = 2\ln x$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)},$$

avec $u(x) = \ln x$. On en déduit qu'une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(\ln x).$$

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $f(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3,\ I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^2},\ I =]-\infty, -2[$

3. $f(x) = \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}},\ I =]-\infty, 0[$

4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^2)},\ I =]1, +\infty[$.