Par intégration par parties avec $u = x$, $v' = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\
&= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\
&= \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 - 0 \quad + \quad 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$

   Posons le changement de variable $u = e^x$ avec $x = \ln u$ et $du = e^x \, dx$. La variable x varie de $x = 0$ à $x = 1$, donc la variable $u = e^x$ varie de $u = 1$ à $u = e$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^x+1}} \, dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\
&= \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e \\
&= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$

   Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$ alors t doit varier de $t = \arctan 0 = 0$ à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

Posons le changement de variable $x = \tan t$, alors on a $dx = (1+\tan^2 t)dt$, $t = \arctan x$ et on sait aussi que $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Comme x varie de $x=0$ à $x=1$ alors t doit varier de $t = \arctan 0 = 0$ à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$

Commençons par décomposer la fraction en éléments simples :

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

où l'on a trouvé $\alpha = 3$ et $\beta = -2$. La première est une intégrale du type $\int \frac{1}{u} = [\ln|u|]$ et la seconde $\int \frac{1}{u^2} = [-\frac{1}{u}]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= 3\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1 - 2\Big[-\frac{1}{x+1}\Big]_0^1 \\
&= 3\ln 2 - 0 \quad + \quad 1-2 \\
&= 3\ln 2 - 1
\end{aligned}$$

5. Notons $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$.

   Posons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et on a $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$. Alors x variant de $x = \frac{1}{2}$ à $x = 2$, u varie lui de $u = 2$ à $u = \frac{1}{2}$ (l'ordre est important !).

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx \\
&= \int_{2}^{\frac{1}{2}}(1+u^2)\arctan\frac{1}{u}\left(-\frac{du}{u^2}\right) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan\frac{1}{u}\,du \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan u\right)du \quad \text{car} \quad \arctan u + \arctan\frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\arctan u\,du \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^{2} - I \\
&= \frac{3\pi}{2} - I
\end{aligned}$$

   Conclusion : $I = \frac{3\pi}{4}$.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ (intégration par parties)
2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$ (à l'aide d'un changement de variable simple)
3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$ (changement de variable $x = \tan t$)

4. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} \, dx$ (décomposition en éléments simples)
5. $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \arctan x \, dx$ (changement de variable $u = \frac{1}{x}$)

Exercice 1.

Calculer

1.

$$F_1(x) = \int_0^x \cos^3(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x \sin^3(t)\,dt$$

3.

$$F_3(x) = \int_0^x \cos^4(t)\,dt$$

4.

$$F_4(x) = \int_0^x \sin^4(t)\,dt$$

5.

$$F_5(t) = \int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,dt$$

6.

$$F_6(x) = \int_0^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt$$

7.

$$F_7(x) = \int_0^x \cos(t)\sin^4(t)\,dt$$

Correction exercice 1.

1. On peut mettre $\cos^3(t)$ sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de $\cos$ est impaire.

$$F_1(x) = \int_0^x \cos^3(t)\,dt = \int_0^x \cos^2(t)\cos(t)\,dt = \int_0^x (1-\sin^2(t))\cos(t)\,dt$$

On pose $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$

$$F_1(x) = \int_0^{\sin(x)} (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{\sin(x)} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}$$

2. On peut mettre $\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de $\sin$ est impaire.

$$F_2(x) = \int_0^x \sin^3(t)\,dt = \int_0^x \sin^2(t)\sin(t)\,dt = -\int_0^x (1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \cos(0) = 1$$

$$t = x \Rightarrow u = \cos(x)$$

$$F_2(x) = -\int_1^{\cos(x)} (1-t^2)dt = -\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\cos(x)} = -\left(\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{3}$$

3. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 0 et 4) on doit linéariser $\cos^4(t)$

$$(\cos(t))^4 = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} + 4\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4t) + 4 \times 2\cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_3(x) = \frac{1}{8}\int_0^x (\cos(4t) + 4\cos(2t) + 3)dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{4}{2}\sin(2t) + 3t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{4}{2}\sin(2x) + 3x\right) = \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

4. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 4 et 0) on doit linéariser $\sin^4(t)$

$$(\sin(t))^4 = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{4it}}{16} = \frac{e^{4it} + e^{4it} - 4\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + 6}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4t) - 4 \times 2\cos(2t) + 6}{16} = \frac{\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3}{8}$$

$$F_4(x) = \frac{1}{8}\int_0^x (\cos(4t) - 4\cos(2t) + 3)dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{4}{2}\sin(2t) + 3t\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) - \frac{4}{2}\sin(2x) + 3x\right) = \frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{8}x$$

5. Ici les puissances de sin et cos sont paires (respectivement 2 et 2) on doit linéariser $\cos^2(t)\sin^2(t)$

$$\cos^2(t)\sin^2(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{2it}+2+e^{-2it}}{4}\right)\left(\frac{e^{2it}-2+e^{-2it}}{-4}\right)$$

$$= \frac{e^{4it}-2e^{2it}+1+2e^{2it}-4+2e^{-2it}+1-2e^{-2it}+e^{-4it}}{-16} = \frac{e^{4it}+e^{-4it}-2}{-16}$$

$$= \frac{2\cos(4t)-2}{-16} = -\frac{1}{8}\cos(4t)+\frac{1}{8}$$

$$F_5(t) = \frac{1}{8}\int_0^x(-\cos(4t)+1)dt = -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(4t)+t\right]_0^x = -\frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{x}{8}$$

6. On peut mettre $\cos^2(t)\sin^3(t)$ sous la forme $f(\cos(t))\sin(t)$ car la puissance de sin est impaire.

$$F_6(x) = \int_0^x \cos^2(t)\sin^3(t)\,dt = -\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)\,(-\sin(t))dt$$

$$= -\int_0^x \cos^2(t)\,(1-\cos^2(t))(-\sin(t))dt$$

On pose $u=\cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t)\,dt$

$$t=0 \Rightarrow u=\cos(0)=1$$
$$t=x \Rightarrow u=\cos(x)$$

$$F_6(x) = -\int_1^{\cos(x)} t^2(1-t^2)dt = \int_1^{\cos(x)} (t^4 - t^2)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\cos(x)}$$

$$= \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + \frac{2}{15}$$

7. $\cos(t)\sin^4(t)$ est sous la forme $f(\sin(t))\cos(t)$ car la puissance de cos est impaire.

On pose $u = \sin(t) \Rightarrow du = \cos(t)\,dt$

$$t = 0 \Rightarrow u = \sin(0) = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = \sin(x)$$

$$F_7(x) = \int_0^{\sin(x)} t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sin(x)} = \frac{\sin^5(x)}{5}$$

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

2. $$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx, \ n \in \mathbb{N}$$

2. $$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(3+e^t)\sqrt{e^t - 1}} dt, \ x > 0$$

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2}$ sur $]1,+\infty[$

2. $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $]-1,+\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2,+\infty[$

4. $f(x) = \frac{24x^3+18x^2+10x-9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $]-1/2,1/3[$

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$

2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+5}$

3. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$